

Função afim (1º grau)

A **Função Afim** (ou polinomial do 1º grau), é utilizada para descrever relações de variação constante e proporcional no nosso dia a dia, como o valor da corrida de um aplicativo de transporte, o cálculo de salários com comissão, a conta de água e luz e o movimento de corpos com velocidade constante na Física.

Quando o valor de uma variável y depende do valor de uma variável x , dizemos que y **está em função de** x .

O y também pode ser indicada por $f(x)$, ou seja, $y = f(x)$.

Uma função é dita **afim** quando o maior expoente da variável independente x é 1. Sua lei geral de formação é expressa por:

$$y = ax + b \quad \text{ou} \quad f(x) = ax + b$$

Sendo que a e b são **números reais**, e definidos como:

- **a (Coeficiente Angular ou Taxa de Variação)**: indica a inclinação da reta e o ritmo de variação da função ($a \neq 0$).

- **b (Coeficiente Linear ou Termo Independente)**: indica o valor inicial da função e o ponto onde a reta intercepta o eixo y .

Exemplos:

1) Determinar os coeficientes a e b das funções a seguir.

a) $y = -2x + 5$

b) $f(x) = x - 6$

c) $y = 2x$

d) $f(x) = 5$

e) $y = 7 - 3x$

Respostas:

1) $a = -2$ e $b = 5$

2) $a = 1$ e $b = -6$

3) $a = 2$ e $b = 0$

4) $a = 0$ e $b = 5$

5) $a = -3$ e $b = 7$

Cálculos com a função afim: atribuindo valor a uma variável x ou y , calcula-se o valor da outra variável, lembrando que y pode ser escrito como $f(x)$.

Exemplos:

1) Dada a função $f(x) = 2x + 5$, determine $f(4)$ (ou y quando $x = 4$):

2) Dada a função $f(x) = 2x + 5$, determine x quando $f(x) = 13$ (ou $y = 13$):

Resoluções

1) Usando a notação de y e substituindo x por 4, temos: $y = 2 \cdot 4 + 5 \rightarrow y = 8 + 5 \rightarrow y = 13$.

Se usarmos a notação $f(x)$, temos $f(4) = 2 \cdot 4 + 5 \rightarrow f(4) = 8 + 5 \rightarrow f(4) = 13$.

2) Substituindo y ou $f(x)$ por 13, temos: $13 = 2x + 5 \rightarrow 13 - 5 = 2x \rightarrow x = 4$

Aplicações da função afim: trocando as letras x e y por outras, temos aplicações em diversas áreas.

Exemplos:

1) **(Física – Movimento Uniforme)** Um corpo se movimenta com velocidade constante sobre uma trajetória reta, obedecendo à função horária $S = 30 + 4t$ (no S.I.). Determine:

- a) Sua posição inicial e velocidade;
- b) sua posição no instante 5 s;
- c) o instante em que o corpo passa pela posição 110 m.

2) (Administração – Função Oferta) - A função oferta de mercado $q = 5000 + 200 \cdot p$ expressa o ponto de vista dos fornecedores e mostra que a quantidade q de produto ofertado aumenta quando o preço p sobe, calcule:

- a) a quantidade colocada a venda, quando o preço for igual a R\$ 5,00.
- b) o preço mínimo para que o fabricante coloque 8000 unidades a venda.

Resoluções:

1)a) comparando a função $S = 20 + 4t$ com a fórmula $S = S_0 + vt$, temos: $S_0 = 30 \text{ m}$ e $v = 4 \text{ m/s}$.

1)b) substituindo t por 5, temos: $S = 30 + 4 \cdot 5 \rightarrow S = 50 \text{ m}$.

1)c) substituindo S por 110, temos: $110 = 30 + 4 \cdot t \rightarrow t = 20 \text{ s}$.

2)a) substituindo p por 5, temos: $q = 5000 + 200 \cdot 5 \rightarrow q = 5000 + 1000 \rightarrow q = 6000$

2)b) substituindo q por 8000, temos: $8000 = 5000 + 200p \rightarrow 3000 = 200p \rightarrow p = 15$

Lei de formação ou modelagem da função: toda função é definida por uma lei de formação, ou seja, uma fórmula que relaciona as variáveis x e y , ou outras letras.

Exemplos:

1) Um Uber cobra R\$ 5,00 fixos mais R\$ 3,00 por quilômetro x rodado. Qual a função que calcula o preço total y ?

2) A produção de morangos tem custo variável q de R\$ 2,00 por caixa e despesa fixa de R\$ 15.000,00. Qual é a fórmula do custo total C ?

Respostas:

1) $y = 5 + 3x$ ou $y = 3x + 5$

2) $C = 15000 + 2q$ ou $C = 2q + 15000$

Obtenção da função a partir de 2 pontos: podemos montar uma função, por meio de duas informações fornecidas, obtendo os termos a e b , por meio de:

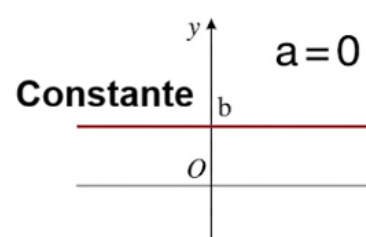
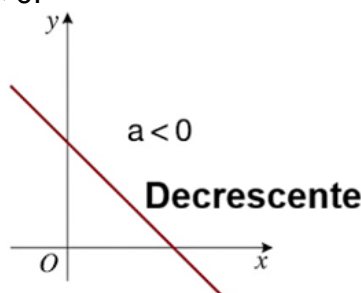
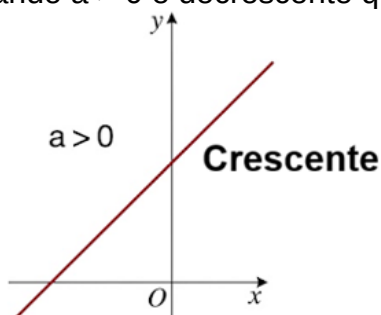
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{e} \quad y = ax + b$$

Exemplo:

1) Um fabricante de chaveiros automotivos identificou que a produção de 600 unidades gera um custo total de R\$ 14.000,00 e a de 900 unidades, R\$ 15.800,00.

- a) Obtenha a função que expressa o custo total C em função da quantidade q produzida.
- b) Determine o custo unitário de produção para um pedido de 1.000 unidades.
- c) Determine o custo unitário de produção para um pedido de 1.000.000 de unidades.

Análise do Gráfico: o gráfico da função afim é uma reta, constante quando $a = 0$, crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.



Construção de gráficos: a reta intercepta o eixo y no termo b e o eixo x na sua raiz (quando $y = 0$). O método mais rápido para construir o gráfico de uma função afim é identificar esses dois pontos de intersecção nos eixos.

Exemplos:

1) Determine os pontos onde as funções abaixo interceptam os eixos horizontal e vertical do plano cartesiano. Em seguida, construa os gráficos.

a) $y = 5x - 10$ b) $f(x) = -3x + 18$

2) Nas funções $f(x) = -2x + 12$ e $g(x) = x + 3$:

a) Determine o ponto em que as retas se interceptam;

b) Construa o gráfico.

3) Dois móveis, A e B, movimentam-se de acordo com as funções horárias $S_A = -20 + 4t$ e $S_B = 40 + 2t$, no S.I.

a) Determine o instante e a posição de encontro dos móveis;

b) Construa o gráfico.

4) As funções oferta $q = 20 + 4p$ e demanda $q = 50 - 2p$, onde a quantidade q (em unidades), está em função do preço p em reais, determinam o comportamento do mercado de determinado produto. O ponto onde as duas funções se encontram representa o **ponto de equilíbrio de mercado**.

a) Determine a quantidade de equilíbrio (q) e o preço de equilíbrio (p) para esse produto.

b) Construa o gráfico.

Função quadrática (2º grau)

Função Quadrática (ou polinomial do 2º grau) é a função que descreve fenômenos com trajetórias parabólicas, como o lançamento de projéteis, antenas parabólicas e otimização de lucros e custos em empresas. É toda função expressa na forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ou} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

Os números reais a , b e c (com $a \neq 0$) são os **coeficientes**, enquanto x e y são as **variáveis**. Portanto os coeficientes são os três números que determinam completamente a forma, a posição e o comportamento da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo:

1) Determine os coeficientes a , b e c das funções abaixo:

a) $y = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x$

c) $y = 3x^2 - 12$

Respostas:

1) $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$

2) $a = -1$, $b = 4$, $c = 0$

3) $a = 3$, $b = 0$, $c = -12$

Cálculo de $f(x)$: atribuindo um valor a x , calcula-se a imagem y ou $f(x)$.

Exemplo:

1) Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determine $f(4)$:

Resolução:

$$1) f(4) = (4)^2 - 5(4) + 6 \Rightarrow f(4) = 16 - 20 + 6 \Rightarrow f(4) = 2$$

Raízes (ou zeros) da função: as raízes de uma função quadrática são os valores de x que tornam $y = 0$. Dependendo do valor do discriminante, a função pode ter 2 raízes reais, uma única raiz real (raiz dupla) ou nenhuma raiz real. O discriminante, representado pela letra grega Δ (delta), é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para $\Delta > 0$, temos 2 raízes reais e distintas. Se $\Delta = 0$, temos uma única raiz real (ou duas raízes reais e iguais). E, quando $\Delta < 0$, a função não possui raiz real.

As raízes podem ser obtidas pela fórmula resolutiva (popularmente conhecida no Brasil como "fórmula de Bhaskara", embora seu desenvolvimento seja atribuído a matemáticos como Euclides e Al-Khwarizmi, entre outros):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alternativamente, quando as raízes são reais, podem ser encontradas pelas relações de soma (S) e produto (P) de suas raízes:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

1) Determine o valor de x nas funções:

a) $y = x^2 - 7x + 10$

b) $y = x^2 - 6x + 9$

c) $y = x^2 - 6x + 10$

2) Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 8$, determine x para que $f(x) = 2$.

Respostas:

1)a) 2 ou 5

1)b) 3

1)c) $\emptyset$

2) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$

Aplicações da função quadrática: trocando as letras x e y por outras, temos aplicações em diversas áreas.

Exemplos:

1) (Física - Lançamento Vertical) - A altura h (em metros) atingida por uma bola em função do tempo t (em segundos) é dada por $h(t) = -5t^2 + 20t$.

a) Qual a altura da bola no instante $t = 1$ s?

b) Em quais instantes a bola estará no chão ($h = 0$)?

2) (Administração – Função Lucro) - O lucro total L (em milhares de reais) de uma pequena fábrica na venda de q unidades de um produto é expresso por $L(q) = -q^2 + 10q - 9$.

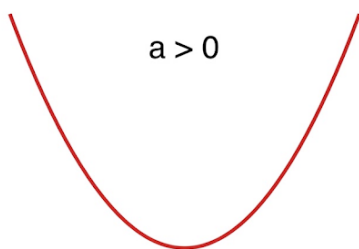
a) Qual o lucro obtido ao vender 4 unidades?

b) Quantas unidades devem ser vendidas para que o lucro seja nulo ($L = 0$)?

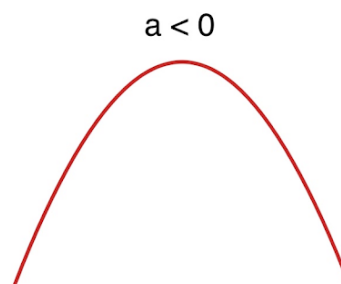
Gráfico da função quadrática: é uma curva chamada parábola.

Coeficiente a : é o mais importante, ele define se a parábola abre para cima ou para baixo e o quão “fechada” ou “aberta” ela é.

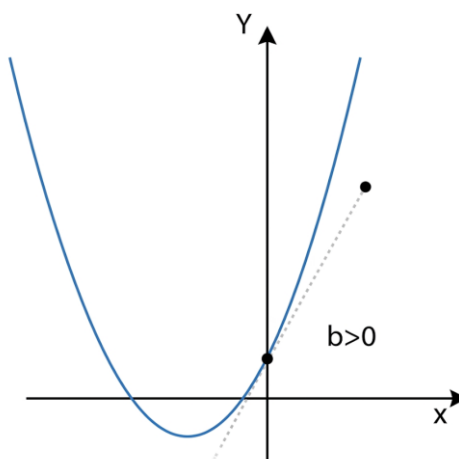
$a > 0$ concavidade voltada para cima



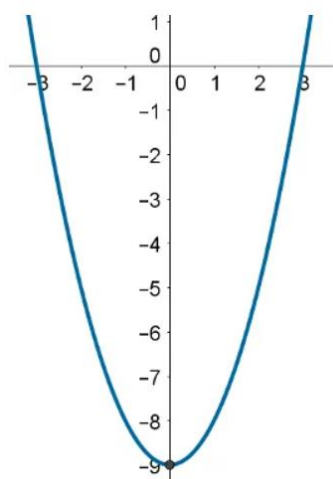
$a < 0$ concavidade voltada para baixo



Coeficiente b : indica o sentido em que a parábola segue após interceptar o eixo vertical (y). Ao percorrer o gráfico da esquerda para a direita, se a curva **sobe** logo após o ponto de corte no eixo y , o coeficiente b é **positivo**; se a curva **desce**, b é **negativo**. Na imagem apresentada, o termo b é positivo porque, ao acompanhar o trajeto da curva, esta segue em sentido ascendente após cruzar o eixo y .

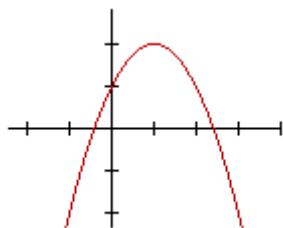


Coeficiente c : representa o ponto de interseção da parábola com o eixo y . É possível comprovar esta relação ao substituir $x = 0$ na lei da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, o que resulta em $f(0) = c$. Observe o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ representado a seguir, onde o ponto de corte no eixo y ocorre exatamente em $(0, -9)$.



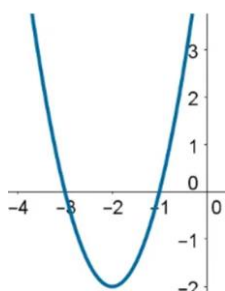
Exercícios da aula:

1) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



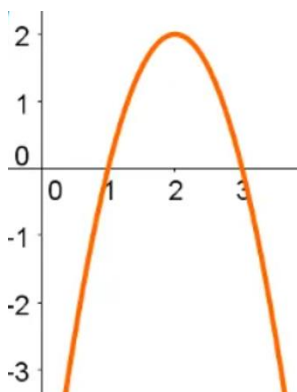
- (A) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$
- (B) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (C) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$
- (D) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (E) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

2) Sobre a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, representada no gráfico abaixo, a afirmativa correta é:



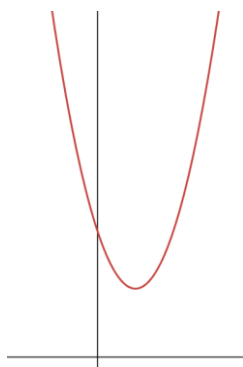
- (A) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$
- (B) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (C) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$
- (D) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (E) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

3) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



- (A) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$
- (B) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (C) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$
- (D) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (E) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

4) Sobre a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, representada no gráfico abaixo, a afirmativa correta é:

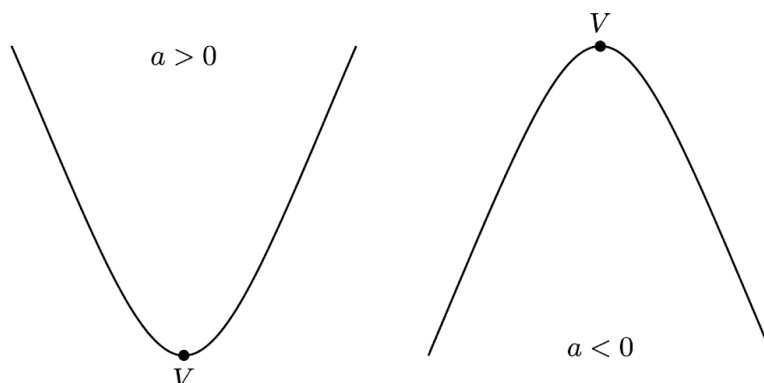


- (A) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$
- (B) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$
- (C) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$
- (D) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$
- (E) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

Respostas:

- 1) E
- 2) C
- 3) D
- 4) B

Vértice (V): toda parábola possui um ponto de máximo ou de mínimo absoluto, chamado de vértice. Esse é o ponto onde a função quadrática deixa de ser crescente e passa a ser decrescente (ou vice-versa), dependendo da concavidade da parábola, conforme ilustrado nas imagens abaixo.



- Se $a > 0$, a concavidade é voltada para **cima** $\cup$, ou seja, a função possui ponto de mínimo.
- Se $a < 0$, a concavidade é voltada para **baixo** $\cap$, ou seja a função possui ponto de máximo.

Exemplo:

1) Diga se as funções a seguir possuem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

b) $h(t) = 6 - t^2$.

Respostas:

1) ponto de mínimo.

2) ponto de máximo.

Coordenadas do vértice: são obtidas por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Exemplo:

1) Calcule as coordenadas do vértice da função $y = x^2 + x - 6$.

Respostas:

1) $x_v = \frac{-1}{2}$ e $y_v = \frac{25}{4}$

Aplicações dos valores máximo e mínimo: O cálculo das coordenadas do vértice permite determinar o valor ótimo em diversas situações práticas, tais como o lucro máximo de uma empresa, o custo mínimo de produção ou a altura máxima atingida por um objeto lançado verticalmente.

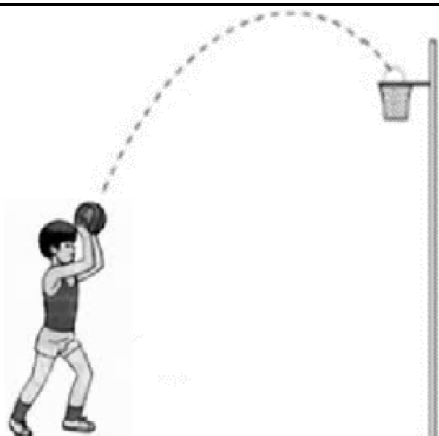
Exemplo:

1) O lucro L de uma empresa, em função da quantidade q produzida e vendida é obtido por $L(q) = -q^2 + 10q - 9$. Calcule:

a) a quantidade q que maximiza o lucro, ou seja, qual o lucro máximo que a empresa consegue obter.

b) o lucro máximo atingido, ou seja o valor máximo em reais que ela consegue lucrar.

2) Um jogador arremessa a bola de basquete em direção à cesta, descrevendo uma trajetória parabólica, conforme a função $h(t) = 2 + 6t - 5t^2$, sendo h a altura da bola, em metros, e t o tempo decorrido do arremesso, em segundos. A altura máxima, em metros, atingida pela bola em relação ao piso é:



Resoluções:

1)a) $(x_v = -\frac{10}{2(-1)} = 5 \text{ unidades})$

1)b) $(y_v = -\frac{64}{4(-1)} = 16 \text{ milhares de reais})$

2) 3,8 m.

Tipos de Gráficos: o gráfico de uma função quadrática intercepta (“corta”) o eixo x nos pontos correspondentes às raízes da função (quando existem) e intercepta o eixo y no ponto (0, c), ou seja, no valor do termo independente c. Quanto ao formato, a parábola pode apresentar as seguintes variações, dependendo do discriminante Δ e do coeficiente a:

Se $a > 0$ e $\Delta > 0$	Se $a > 0$ e $\Delta = 0$	Se $a > 0$ e $\Delta < 0$
Se $a < 0$ e $\Delta > 0$	Se $a < 0$ e $\Delta = 0$	Se $a < 0$ e $\Delta < 0$

Construção de Gráficos: para construir gráficos, utilizamos o plano cartesiano, formado por dois eixos perpendiculares: o eixo horizontal das abscissas (x) e o eixo vertical das ordenadas (y). Ambos são retas infinitas. A partir dessa estrutura, determinamos pontos por meio de suas coordenadas (x, y) e os conectamos com uma linha contínua, obtendo o traçado característico da função estudada.

Exemplos:

1) Construa os gráficos das funções:

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

c) $y = x^2 - 6x + 10$

Diferença entre as raízes de uma função quadrática: indica o quanto elas estão afastadas no eixo x. Essa distância depende do valor do discriminante (Δ) e do coeficiente a . Quanto maior o valor de Δ , mais distantes são as raízes; quanto maior o valor de a , mais próximas elas ficam. A relação é dada por:

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Exemplos:

1) Verifique em quantas unidades as raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ estão separadas no eixo x.

Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Calculando o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

Logo,

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{1}}{1} = \pm 1$$

As raízes diferem em uma unidade, ou seja, estão separadas por 1 no eixo x.

2) Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Sabe-se que o discriminante é igual a 49 e que o coeficiente a é igual a 1, calcule a diferença entre as raízes.

Como o problema já fornece $\Delta = 49$ e $a = 1$, basta aplicar diretamente a relação entre a diferença das raízes:

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

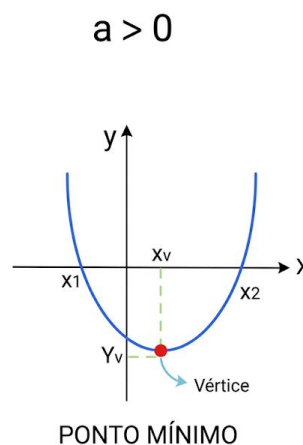
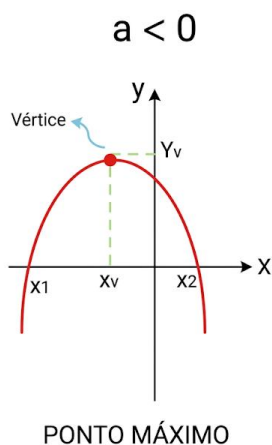
Substituindo os valores:

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{49}}{1}$$

$$x_1 - x_2 = \pm 7$$

Portanto, a diferença entre as raízes é igual a 7 (em valor absoluto).

Pontos críticos (Yv): os valores que a variável y pode assumir em uma função quadrática são limitados pelo vértice, que define o valor extremo da função. Quando a concavidade é voltada para cima ($a > 0$), o vértice é o ponto de mínimo, e yv é o menor valor atingido. Quando a concavidade é voltada para baixo ($a < 0$), o vértice é o ponto de máximo, e yv é o maior valor atingido.



Exemplos:

1) Determine os pontos críticos das funções:

a) $y = x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$

Determinação de uma função quadrática a partir de suas raízes: a expressão algébrica da função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$. Para obtermos essa expressão conhecendo suas raízes, podemos calcular a soma (S) e o produto (P) delas e substituir em:

$$y = x^2 - Sx + P$$

Exemplo:

1) Obtenha a expressão algébrica da função quadrática que possui raízes 1 e 3.

Solução: para as raízes 1 e 3, temos $S = 4$ e $P = 3$. Substituindo em $y = x^2 - Sx + P$, temos a função $y = x^2 - 4x + 3$.

Função exponencial

A Função Exponencial é uma das ferramentas mais poderosas da matemática para modelar fenômenos de crescimento ou decrescimento acelerado. Ao contrário da função afim (onde a variação é constante), na função exponencial o ritmo de mudança se multiplica a cada intervalo. Ela é amplamente utilizada para descrever o crescimento populacional, o espalhamento de vírus, os juros compostos no mercado financeiro e a desintegração radioativa na Física e na Química. Uma função é dita exponencial quando a variável independente x se encontra no expoente de uma base constante e positiva.

Sua lei geral de formação é expressa por:

$$y = a^x \text{ ou } f(x) = a^x$$

Ou, em sua forma completa para aplicações reais: $f(x) = k \cdot a^x$, em que as condições de existência exigem que a base a seja um número real com:

$a > 0$ (a base deve ser estritamente positiva)

$a \neq 1$ (pois $1^x = 1$, o que geraria uma função constante)

Equação Exponencial: uma equação onde a incógnita está no expoente é chamada de equação exponencial. A maioria das equações exponenciais é resolvida simplesmente tornando as bases iguais, então é possível cancelar as bases e em seguida igualar seus expoentes. Algumas equações necessitam de uma análise mais aprofundada.

Exemplos: resolva as equações abaixo:

$$\begin{array}{llllll} 1) 3^x = 9 & 2) 4^{x-1} = 32 & 3) 3^x = \sqrt[5]{3^4} & 4) 25^{3x+1} = \sqrt{5^{56-x}} & 5) 4^{x+1} \cdot 8^{2x-3} = \frac{2^{1+x}}{16} \\ 6) 3^{x^2-x-6} = 1 & 7) 3 \cdot 2^{x+3} = 192 & 8) 8^x = 0,25 \end{array}$$

Respostas dos exemplos: 1)2 2)7/2 3)4/5 4)4 5)4/7 6)-2 ou 3 7)3 8)-2/3

Exercícios da aula:

$$1)2^x = 32 \quad 2)4^{3x} = 64 \quad 3)2^x = 1/16 \quad 4)8^{x-1} = 1/16^x \quad 5)(1/5)^x = 125 \quad 6)10^{1-x} = 1/10$$

$$7)(\sqrt[4]{3})^x = (\sqrt[3]{9})^{\square} \quad 8)(\sqrt{2})^x = 2 \quad 9)3^{x-5} = 27^{1-x} \quad 10)\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \quad 11)(0,2)^{x-2} = 1$$

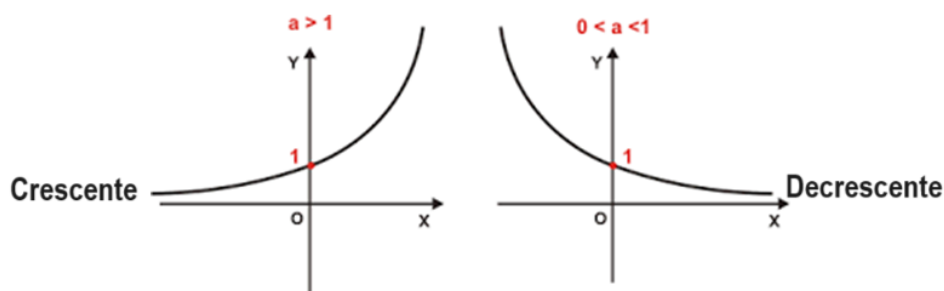
$$12)(0,5)^{2x} = 2^{1-3x} \quad 13)7^{x^2-2} = 7^{79} \quad 14)(-0,85)^{x^2-7x} = (-0,85)^{-10} \quad 15)(0,01)^{x^2-1} = (0,01)^{x-1}$$

$$16) 9^{x+1} \cdot 3^{2x-3} = \frac{3^{1+x}}{9} \quad 17)5 \cdot 7^{x+3} = 35$$

Respostas dos exercícios: 1)5 2)1 3)-4 4)3/7 5)-3 6)2 7)8/3 8)2 9)2 10)-2/3 11)2 12)1 13)-9 ou 9 14)2 ou 5 15)0 ou 1 16)0 17)-2

Função Exponencial: Denomina-se função exponencial de base a , toda função real dada por $f(x) = a^x$ (com $a \neq 1$ e $a > 0$), onde x pertence ao conjunto dos números reais.

Gráfico da Função Exponencial: O gráfico da função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, é uma curva, quando $a > 1$, ela é crescente e quando $0 < a < 1$, ela é decrescente.



Uma observação importante é que o gráfico de qualquer função exponencial sempre passa pelo ponto $(0,1)$. Pois qualquer valor elevado a zero é igual a 1.

Exemplos de Aplicações da Função Exponencial

1) Certa substância se decompõe segundo a lei $Q(t) = 2500 \cdot 2^{-0,5 \cdot t}$, onde $Q(t)$ indica a quantidade da substância (em gramas) em função do tempo t (em minutos). Qual a quantidade aproximada da substância em $t=10$ minutos?

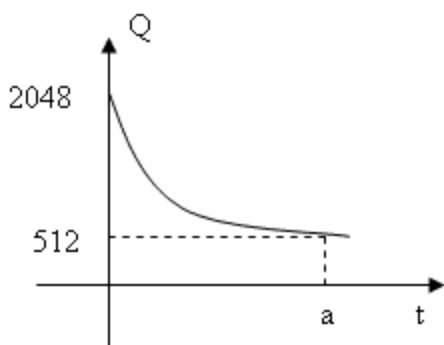
- a) 500 gramas b) 78,125 gramas c) 12,500 gramas d) 600 gramas e) 1,500 gramas

2) Certa substância se decompõe segundo a lei $Q(t) = 2500 \cdot 2^{-0,5 \cdot t}$, onde $Q(t)$ indica a quantidade da substância (em gramas) em função do tempo t (em minutos). Após quanto tempo a quantidade de substância será igual a 1.250 gramas?

- a) 1 minuto b) 4 minutos c) 5 minutos d) 15 minutos e) 2 minutos

3) Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t , medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{t/12}$. Isso significa que 5 dias após a hora zero o número de bactérias é:

4) Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$, em que K é uma constante, t indica o tempo em minutos e $Q(t)$ indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t . Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a .



5) O montante M é a quantia a ser recebida após a aplicação de um capital C , a uma taxa de juros i , durante certo tempo t . No regime de juros compostos, esse montante é calculado pela relação $M = C \cdot (1 + i)^t$. Considere um capital de R\$ 10.000 aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos. Qual seria o montante ao final dessa aplicação? Dado: $1,12^4 = 1,57352$

Respostas dos Exemplos de aplicações das Funções: 1)b 2)e 3)1024 4)K = 2048 e a = 4 5)R\$ 15.735,20

Função logarítmica

A Função Logarítmica é a operação inversa da função exponencial. Desenvolvida historicamente para simplificar grandes cálculos numéricos, ela é hoje indispensável para medir fenômenos que se espalham por várias ordens de grandeza. É utilizada para calcular a escala Richter (magnitude de terremotos), o pH de soluções químicas, a intensidade sonora em decibéis, além de determinar o tempo necessário para alcançar metas financeiras em investimentos. Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), chamamos de função logarítmica de base a a função expressa por:

$$y = \log_a(x) \quad \text{ou} \quad f(x) = \log_a(x)$$

Logaritmo (log): é uma forma diferente de expressar uma relação exponencial entre números. Por exemplo, $2^3 = 8$, pode ser escrito como $\log_2 8 = 3$ (que se lê: “log de 8 na base 2 é igual a 3”), as nomenclaturas são: 8 é o logaritmando ou antilogaritmo; 2 é a base; 3 é o logaritmo. Resolver logaritmos transformando-os em equações exponenciais é uma das técnicas mais importantes da Álgebra. A ideia central é usar a definição de logaritmo para “voltar” à forma exponencial.

Pela definição fundamental de logaritmo, temos a equivalência com a exponencial:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Exemplos: calcule o valor de x em:

$$1) \log_5 25 = x \quad 2) \log_2 0,5 = x \quad 3) \log_2 x = 5 \quad 4) \log_x 16 = 2 \quad 5) x = \log_4 16$$

Condição de existência: para que exista o logaritmo de $\log_b a$, devemos ter: **a e b maiores que zero e b diferente de 1.**

$$b > 0, b \neq 1 \text{ e } a > 0$$

Ou seja, a base de um logaritmo pode ser qualquer número maior que zero, exceto o 1. E o logaritmando deve ser positivo.

Justificativas: Se $b = 0$, $\log_0 5 = 2 \Leftrightarrow 0^2 = 5$ absurdo!
 Se $b = 1$, $\log_1 7 = 5 \Leftrightarrow 1^5 = 7$ absurdo!
 Se $b < 0$, $\log_{-3} 4 = 81 \Leftrightarrow -3^4 = 81$ absurdo!
 Se $a = 0$, $\log_3 0 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 0$ absurdo!
 Se $a < 0$, $\log_2 -16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = -16$ absurdo!

Consequências da condição de existência de logaritmos: a partir da definição de logaritmo, podemos estabelecer as seguintes situações:

I) $b^{\log_b N} = N$. Se o expoente de uma potência for um logaritmo, e o valor da base desse logaritmo for igual ao da base da potência, então o resultado será o próprio logaritmando.

Justificativa:

$$\log_a b = \log_a b$$

$$\log_a b = \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Dica:

~~$$a^{\log_a b} = b$$~~

Podemos **cortar ou cancelar**, o valor da base da potência com o logaritmo e sua base, e nos restará apenas o logaritmando. Matematicamente, esse cancelamento não faz sentido algum. Isso é **apenas uma técnica** que utilizamos para lembrar que em casos como esse, o resultado é o próprio logaritmando do logaritmo.

II) Se $\log_b N = \log_b P$ então $N = P$. Quando dois logaritmos com a mesma base são iguais, os logaritmandos também serão iguais.

Exemplos: calcule os logaritmos.

1) $\log_9 1 = x$ 2) $\log_5 5 = x$ 3) $\log_3 3^5 = x$ 4) $2^{\log_2 3} = x$ 5) $5^{\log_5 8} = x$ 6) $\log_2 (x-3) = \log_2 3$

Resoluções:

1) $x = 0$, pois $\log_9 1 = 0$, logo $9^0 = 1$.

2) $x = 1$, pois $\log_5 5 = 1$, logo $5^1 = 5$

3) $x = 5$, pois $\log_3 3^5 = 5$.

4) $x = 3$, pois $2^{\log_2 3} = 3$

5) $x = 8$, pois $5^{\log_5 8} = 8$

6) $x = 6$, pois:

$$\log_2 (x - 3) = \log_2 3$$

$$x - 3 = 3$$

$$x = 3 + 3$$

$$x = 6$$

Sistema de logaritmos decimais: é o sistema de base 10, quando aparecer um logaritmo sem a identificação da base, devemos entender como sendo base 10.

$$\log_{10} x = \log x$$

Ou seja: $\log_{10} 2 = \log 2$ $\log_{10} 5 = \log 5$ $\log_{10} 7 = \log 7$

Exemplos: calcule:

1) $\log 1000 = x$

2) $\log 0,01$

Obs.: podemos acrescentar o sinal de igual e o x , quando não aparecer no exercício.

Exercícios da aula:

1) Calcule x :

a) $\log_5 25 = x$ b) $\log 1000 = x$ c) $\log_2 2 = x$ d) $\log_2 1/4 = x$ e) $\log_{1/2} 8 = x$ f) $\log_2 1 = x$
g) $\log_{10} 0,1 = x$ h) $\log_{1/9} 3\sqrt{3} = x$ i) $\log_3 81 = x$ j) $\log_{1/2} 32 = x$ k) $\log_8 1 = x$ l) $\log_{\sqrt{5}} 5 = x$
m) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x$ n) $\log_2 128 = x$ o) $\log_3 27 = x$ p) $\log_5 125 = x$ q) $\log_{10} 000 = x$ r) $\log_{1/2} 64 = x$

2) Usando a definição, calcule:

a) $\log_{10} 0,01$ b) $\log_2 0,5$ c) $\log_2 \sqrt{8}$ d) $\log_4 \sqrt{32}$ e) $\log_{1/4} 16$ f) $\log_{2/3} 8/27$ g) $\log_2 0,25$
h) $\log_7 7$ i) $\log_4 1$ j) $\log_{1/5} 1/5$

3) Determine o valor da base x nas seguintes igualdades:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_x 5 = 1$ d) $\log_x 36 = 2$ e) $\log_x 4 = -2$ f) $\log_x 16 = 2$
g) $\log_x 1/16 = 2$ h) $\log_x 25 = 2$ i) $\log_x 10 = 1$

4) Calcule x nas igualdades:

a) $\log_2 x = 5$ b) $3 = \log_4 x$ c) $\log(x+1) = 2$ d) $\log_x 27 = 3$ e) $-1 = \log_3 x$ f) $\log x = 0$

5) Obtenha os valores dos logaritmos:

a) $\log_{0,1} 10 = x$ b) $\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{9}\right) = x$ c) $\log_{\sqrt{2}} 8 = x$ d) $\log_4 \sqrt[3]{16} = x$ e) $\log_2 8 = x - 5$
f) $\log_4 32 = 2x + 1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x + 2$

6) Resolva as seguintes equações:

- a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$ c) $\log_3(x - 1) = 1$ d) $\log_x 4 = 2$ e) $\log_{2x} 4 = 2$
 f) $\log_x 27 = 3$ g) $\log_x(2x^2 - 3x + 2) = 0$

Respostas: 1)a)2 b)3 c)1 d)-2 e)-3 f)0 g)-1 h)-3/4 i)4 j)-5 k)0 l)2 m)4 n)7 o)3
 p)3 q)4 r)-6 2)a)-2 b)-1 c)3/2 d)5/4 e)-2 f)3 g)-2 h)1 i)0 j)1 3)a)2 b)3 c)5 d)6
 e)1/2 f)4 g)1/4 h)5 i)10 4)a)32 b)64 c)99 d)3 e)1/3 f)1 5)a)x=-1 b)x=2 c)x=6
 d)x=2/3 e)x=8 f)x=3/4 g)x=-5 6)a)x=81 b)x=4 c)x=4 d)x=2 pela condição de
 existência, -2 não é solução. e)x=1, pela condição de existência, -1 não é solução. f)x=3
 g)x=1/2, pela condição de existência, 1 não é solução.

Cologaritmo (colog): é o nome que se dá ao oposto do logaritmo, isto é:

$$\text{colog}_a x = -\log_a x$$

Exemplos: calcule:

- 1) $\text{colog}_2 8 = -\log_2 8 = -3$ 2) $\text{colog} 100 = -\log 100 = -2$

Propriedades dos Logaritmos

As propriedades dos logaritmos são propriedades operatórias que simplificam os cálculos dos logaritmos, principalmente quando as bases não são iguais.

1ª propriedade - Logaritmo do Produto: o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números..

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplos:

- 1) Calcule: $\log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$
 2) Calcule: $\log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$

2ª propriedade - Logaritmo do Quociente: o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

$$\log_a(b : c) = \log_a b - \log_a c$$

Exemplos:

- 1) Calcule: $\log_2\left(\frac{4}{32}\right) = \log_2 4 - \log_2 32 = 2 - 5 = -3$
 2) Calcule: $\log_2 1024 - \log_2 64 = \log_2\left(\frac{1024}{64}\right) = \log_2 16 = 4$

3ª propriedade - Logaritmo da Potência: o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Exemplos:

- 1) Calcule: $\log 100^3 = 3\log 100 = 3 \cdot 2 = 6$
 2) Obtenha o valor de x em: $2/3 \cdot \log_x 27 = 1 \rightarrow 2/3 \cdot \log_x 3^3 = 1 \rightarrow \log_x(3^3)^{2/3} = 1 \rightarrow \log_x 3^2 = 1 \rightarrow x = 9$.

4ª propriedade – Mudança de base: para aplicar as propriedades anteriores é necessário que todos os logaritmos da expressão estejam na mesma base. Neste caso é necessário transformar todos para uma mesma base. A mudança de base também é muito útil quando precisamos usar a calculadora para encontrar o valor de um logaritmo que está em uma base diferente de 10 (calculadoras científicas só resolvem log na base 10). fazendo a mudança de base podemos transformar um logaritmo em um quociente de logaritmos, para fazer essas transformações é preciso obedecer algumas regras e propriedades operatórias como por exemplo, quando temos o valor de $\log_b N$, mas queremos obter o valor de $\log_a N$, com $a \neq b$, usamos a relação:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \text{ (mudamos a base dada "a" para "b")}$$

Exemplos:

1) Mude a base do log de 7 para 5:

a) $\log_7 8$ b) $\log_7 2$

2) Mude a base dos log de 3 para 2:

a) $\log_3 8$ b) $\log_3 2$

3) Calcular $\log_4 8$:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

Exemplos envolvendo as 4 propriedades:

1) Usando a primeira propriedade, calcule: $\log_5 x + \log_5 2 = 2$

2) Usando as propriedades dos logaritmos, calcule:

a) $\log_2(8.16)$ b) $\log_2 + \log_5$ c) $\log_2 4/32$ d) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ e) $\log_4 8$ f) $\log_8 16$

3) Simplificar $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$:

4) Resolver a equação $\log_{100} x + \log_{10} x = 3$

5) Usando as propriedades, calcule x em:

b) $\log_7 8 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 5$ c) $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$

6) Usando as propriedades, calcule x em: $2/3 \cdot \log_x 27 + 2 \cdot \log_x 2 - \log_x 3 = -1$

Respostas: 1) 25/2 2) a) 7 b) 1 c) -3 d) 2/3 e) 3/2 f) 4/3 3) 1 4) 100 5) a) 3 b) 2 6) 1/12

Logaritmo natural (neperiano): o sistema de logaritmos neperianos ou logaritmo natural, recebe esse nome em homenagem ao seu criador John Nepper. A base desse logaritmo é o número “e”, um número irracional, cujo valor é 2,71828...

Podemos escrever esse logaritmo como $\text{Log}_e R$ ou podemos omitir a base e, escrevendo $\ln R$. Nesse caso, já sabemos que se trata de um logaritmo neperiano de R, ou simplesmente, logaritmo de R na base “e”. Ao representar um logaritmo natural há o costume de escrever $\ln(x)$ em vez de $\log_e(x)$.

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$\text{Ou seja: } \log_e 2 = \ln 2 \quad \log_e 5 = \ln 5 \quad \log_e 7 = \ln 7$$

OBS.: **As propriedades para $\ln$, são as mesmas dos $\log$.**

Exemplos:

1) Resolva a equação $e^{5x} = 2$, dado: $\ln 2 \cong 0,7$.

Solução:

$$e^{5x} = 2$$

Aplicando logaritmo natural nos dois lados da equação dada, temos:

$$\ln e^{5x} = \ln 2$$

Usando a propriedade no lado esquerdo da equação e substituindo $\ln 2$, temos:

$$5x \ln e \cong 0,7$$

Trocando $\ln e$ por $\log_e e$ temos:

$$5x \cdot 1 \cong 0,7$$

Repare que $\ln e = \log_e e = 1$. Calculando, temos:

$$x \cong \frac{0,7}{5} \cong \frac{7}{50}$$

2) Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$, dado: $\ln 10 \cong 2,3$.

Solução:

$$e^{5-3x} = 10 \Rightarrow \ln(e^{5-3x}) = \ln(10)$$

$$\ln(e^{5-3x}) = 2,3 \Rightarrow (5 - 3x) \cdot \ln(e) = 2,3 \Rightarrow 5 - 3x = 2,3 \Rightarrow$$

$$3x = 5 - 2,3 \Rightarrow x = \frac{2,7}{3} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Exercícios da aula:

1) Dado: $\ln 2 \cong 0,7$ e $\ln 10 \cong 2,3$, resolva as equações:

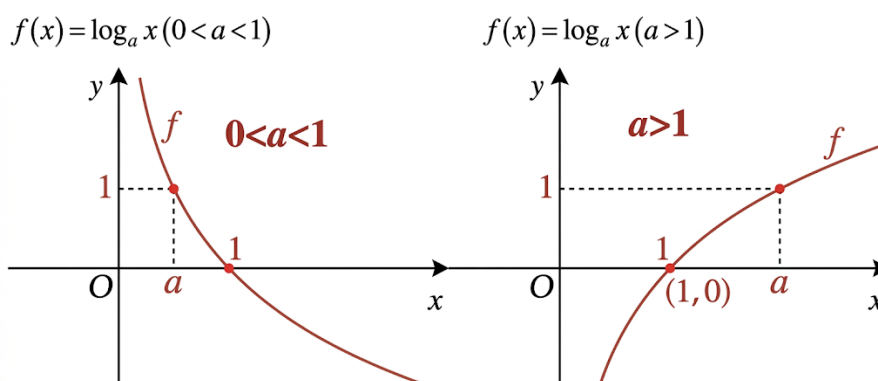
a) $10^{3x} = 2$

b) $8 = e^{x^2}$

c) $10^{(x-4)} = 8$

Respostas: 1) a) $\frac{7}{69}$ b) $\sqrt{\frac{21}{10}}$ c) $\frac{113}{23}$

Função logarítmica: denomina-se função logarítmica de base a , a função f real dada por $f(x) = \log_a x$ (com $a \neq 1$, $a > 0$ e $x > 0$). Com relação ao seu gráfico, quando $a > 1$, temos uma função logarítmica crescente e quando $0 < a < 1$, temos uma função logarítmica decrescente.



Observação: A função logarítmica é a inversa da exponencial.

Aplicações da Função Logarítmica: amplamente utilizada para modelar fenômenos onde o crescimento ou decaimento ocorre de forma exponencial, permite comprimir grandes escalas de dados em valores mais práticos de visualizar e comparar. Elas são fundamentais para medir a intensidade de terremotos, calcular a acidez de soluções, estimar o nível do som, prever o crescimento populacional e determinar o tempo de rendimento de investimentos.

Exemplos:

1) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático $h(t) = 1,5 + \log_3(t+1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

2) Uma das grandezas relacionadas ao som é a sua altura **A**, medida em decibéis (dB). A altura de um som está relacionada com a sua intensidade **I**, medida em watts por metro quadrado, através da função $A(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, sendo I_0 uma constante que vale $10^{-12} \frac{W}{m^2}$. Sabe-se que a intensidade sonora aproximada de um carro é $10^{-4} \frac{W}{m^2}$. Portanto, pode-se afirmar que a altura do som produzido pelo carro é igual a:

3) A Escala Richter é uma função logarítmica utilizada para medir a magnitude dos abalos sísmicos, ou seja, dos terremotos. A magnitude de um terremoto pode ser calculada pela equação logarítmica $M = \log_{10}(A \cdot f) + 3,30$, onde M = Magnitude do terremoto na escala Richter; A = Amplitude do movimento da onda registrada no sismógrafo. f = frequência da onda, em hertz. Diante das informações acima, suponhamos que um terremoto teve como amplitude 1000 micrometros e frequência igual a 0,1Hz. Qual a magnitude deste terremoto?

4) Muito utilizado na química, a escala de pH (sigla para potencial hidrogeniônico), fornece medidas entre 0 a 14, substâncias que apresentam pH abaixo de 7 são denominadas ácidas, enquanto que substâncias com valores de pH acima de 7 são alcalinas, o pH 7 é neutro. O pH é o log negativo de base 10 da concentração molar de íons de hidrogênio (H^+), ou seja:

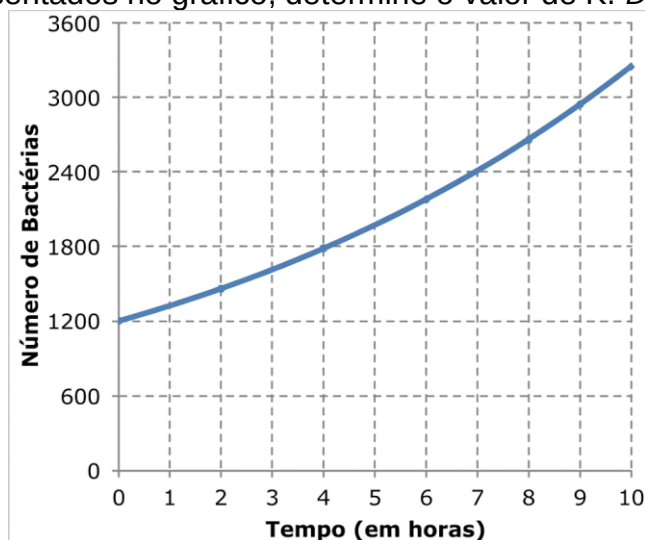
$$pH = -\log(H^+)$$

Sabendo que a concentração molar por litro do suco gástrico é 10^{-1} mol/l , qual é o seu pH?

5) (FUVEST) O químico Sørensen definiu o pH (potencial hidrogeniônico) de uma solução do seguinte modo $pH = -\log[H^+]$, onde H^+ é a concentração em íon-grama de hidrogênio por litro de solução. Para o $pH < 7$ a solução é ácida, para $pH = 7$ a solução é neutra e para $pH > 7$ e, teoricamente menor que 14, a solução é básica. Numa amostra de leite de magnésia (que é essencialmente uma suspensão de hidróxido de magnésio $Mg(OH)_2$ em água) obteve-se a concentração hidrogeniônica $H^+ = 3,3 \cdot 10^{-11}$. Determine o pH dessa amostra de leite de magnésia. Dados: $\log 3,3 = 0,52$ e $pH = -\log(H^+)$.

6) O número A de associados de um clube, aumenta segundo a função $A = 9 \cdot e^{0,1t}$, onde t é o tempo em anos após a inauguração do clube. A quantidade de associados atingirá 9 mil pessoas daqui a quantos anos? Dado: $\ln 10 \cong 2,3$.

7) Uma cultura de bactérias cresce segundo a função $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$, onde C e K são constantes, N é o número de bactérias presentes na cultura, t é o tempo em horas e C é o valor inicial. Utilizando os dados apresentados no gráfico, determine o valor de K . Dado: $\ln(1,5) = 0,4$.



8) A quantidade $Q(t)$, em gramas, de uma substância radiotiva, diminui segundo a função $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,07 \cdot t}$, onde, t é o tempo em horas e Q_0 é a quantidade inicial, em gramas. Determine o tempo para que a quantidade inicial desta substância seja reduzida pela metade. Dado: $\ln 2 \cong 0,7$.

Respostas: 1)8 2)80 3)5,3 graus 4)1 5)pH = 10,48 6)69 anos 7)K = 0,1 8)10 anos